Tw. R-N-Stępniowskiego vs R-N-Segala

Def: Niech μ, ν miary na (Ω, Σ).

ν jest μ-semi-skończona jeżeli

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad 0 < \nu(A) \Rightarrow \exists_{B \subseteq A} \quad 0 < \nu(B) \text{ oraz } \mu(B) < \infty$$

Uwaga: Miara μ jest semi-skończona jeżeli jest μ-semi-skończona, tzn.

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad 0 < \mu(A) \Rightarrow \exists_{B \subseteq A} \quad 0 < \mu(B) < \infty.$$

Pr 1 Jeżeli μ jest σ-skończona, to każda miara ν jest μ-semi-skończona

Pr 2 Miara licząca μ jest semi-skończona (zawsze) ale mogą istnieć miary ν nie μ-semi-skończone

(Solis) μ, ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, μ - miara licz.
ν - miara Lebesgue'a.

$\mu(B) < \infty \iff B$ - zbiór skończony $\Rightarrow \nu(B) = 0$

zatem ν nie jest μ-semiskończone.

Lemat: Jeśli μ i ν miary na (Ω, Σ), to wzór

$$\bar{\nu}(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, \mu(B) < \infty\}$$

definiuje miarę μ-semi-skończoną oraz

$$\nu = \bar{\nu} \iff \nu \text{ jest } \mu\text{-semiskończona}$$

Dowód: Lem 3 wykład 3

Wn. (Dla Pani Kotarzyny)

$$\nu \text{ jest } \mu\text{-semiskoń} \iff \forall_{A \in \Sigma}\ \nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A, \mu(B) < \infty\}$$

TW. 1 (R-N-Stępkowskiego 2021)

Niech (Ω, Σ, μ) prz. z miarą posiadającą supremum miary (chyba wystarczy więcej supremum zbiorów o μ-mierze skończonej)

$$\nu \ll \mu \text{ oraz } \nu \text{ jest } \mu\text{-semiskończone} \Rightarrow \exists \text{ pochodna R-N tzn}$$

$$f_0 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ t. że } \forall_{A \in \Sigma}\ \nu(A) = \int_A f_0\, d\mu$$

$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$

Dowód: Niech $F_\mu = \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$.
Ze STw (R-N (4) (wykład 9)) istnieje quasi-funkcja

$\{f_A\}_{A \in F_\mu}$ t. że $\forall_{B \in F_\mu}$ $\nu(B) = \int_B f_B \, d\mu$

Na mocy Tw. Stąpkowskiego (wykład 20) quasi-funk.
$\{f_A\}_{A \in F_\mu}$ posiada supremum istotne

$$f_0 := \mu\text{-}\sup_{B \in F_\mu} f_B$$

Wtedy $f_B \overset{\mu\text{-pw.}}{=} f_0 \mathbb{1}_B$ dla każdego $B \in F_\mu$.

W szczególności
$$\boxed{\forall_{B \in F_\mu} \ \nu(B) = \int_B f_B \, d\mu = \int_B f_0 \, d\mu}$$

Niech teraz $A \in \Sigma$. Zauważmy, że
$$f_0 \mathbb{1}_A = \mu\text{-}\sup_{B \in F_\mu} f_B \cdot \mathbb{1}_A = \mu\text{-}\sup_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}} f_B$$

Ponadto, $\{f_B\}_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}}$ jest monotoniczną siecią

$B, C \in F_\mu$, $B, C \subseteq A$ $\Rightarrow$ $B \cup C \in F_\mu$ i $B \cup C \subseteq A$

μ-pw.

$$\left\{\begin{array}{l} B, C \subseteq A \\ B \subseteq C \implies f_B \overset{\mu\text{-p.w.}}{\leq} f_C \end{array}\right.$$

Zatem z Tw. (o zb. monotonicznej dla sieci) (Wykład 10)

$$\int_A f_0 \, d\mu = \int_\Omega f_0 \mathbb{1}_A \, d\mu \overset{TW}{=} \int \sup_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}} f_B \, d\mu =$$

$$= \sup_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}} \int f_B \, d\mu = \sup_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}} V(B)$$

Ale skoro V jest μ-semi-skończone, to

$$\sup_{\substack{B \in F_\mu \\ B \subseteq A}} V(B) = V(A)$$ (Wn. (dla Pani Katarzyny))

Zatem $\int_A f_0 \, d\mu = V(A)$. $\blacksquare$

Def: (Szymbo) Powiemy, że miary V, μ na (Ω, Σ) są **wspólnie semi-skończone** jeśli

dla przekroju $F_{\mu,V} = \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty, V(B) < \infty\}$ zachodzi

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu},\ B \subseteq A\} \qquad \forall_{A \in \Sigma}$$

$$\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu},\ B \subseteq A\}$$

Uwaga: Jasne jest, że

μ, ν są wspólnie semi-skończone $\Rightarrow$ ν jest μ-semiskończ. / μ jest ν-semiskończ. $\overset{?}{\Leftarrow}$

$\boxed{\text{Pr.}}$ μ – miara licząca na $(\Omega, 2^{\Omega})$

ν – miara trywialna $\nu(A) = +\infty$ dla $A \neq \emptyset$

Wtedy $\nu \leq \mu$ i $\mu \leq \nu$ (czyli $\nu \simeq \mu$)

$\mathcal{F}_\mu = \{B : \mu(B) < +\infty\}$ – rodzina zb. skończonych

Natomiast $\mathcal{F}_{\mu,\nu} = \mathcal{F}_\nu = \{\emptyset\}$

ν jest μ-semi-skończone, ale

μ nie jest ν-semi-skończone

W szczególności μ i ν nie są wspólnie semi-skończone. ‼

Zachodzi tu Th. Stępkowskiego z $f_0 \equiv +\infty$.

zachodzi tu Tw. Stępniowskiego z $t_0 = +\infty$.
ale nie zachodzi Tw. Segala!

Tw (Segal 1952 revisited)
Niech μ semi-skończona miara na (Ω, Σ)
NWSR:

1) μ - lokalizowalna
2) dla dowolnej miary $\nu \ll \mu$ oraz μ-semi-skończonej istnieje pochodna R-N.
3) dla dow. miary $\nu \leq \mu$ takiej, że μ i ν są wspólnie semi-skończone istnieje pochodna R-N.

Ponadto, pochodne R-N w punktach 2), 3) są wyznaczone jednoznacznie μ-p.w.

Dowód: 1) => 2) Tw. (R-N-Stępniowskiego)
2) => 3) oczywiste

3) $\Rightarrow$ 1). Trzeba pokazać, że (Ω, Σ, μ) posiada supremum miarowe. Na mocy Lematu 3 (wykład 10). Wystarczy pokazać że dowolna rodzina $\mathcal{A} \subseteq F_\mu = \{B \in \Sigma ; \mu(B) < \infty\}$ zamknięta na podzbiory i skończone sumy ma supremum miarowe.

Z Lem 2 (wykład 10) wzór

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad \nu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathcal{A}\}$$

definiuje miarę na (Ω, Σ) taką, że

$$\nu|_A = \mu|_A < \infty \text{ zatem } \mathcal{A} \subseteq F_{\mu,\nu}$$

i miary ν, μ są wspólnie semi-skończone

$$\begin{cases} \nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A,\ B \subseteq F_{\mu,\nu}\} \\ \mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in F_\mu\} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall_{A\in\Sigma} \nu(A) \le \mu(A) \Rightarrow F_{\mu,\nu} = F_\mu}$$

Zatem z założenia istnieje pochodna R-N

$f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Pokażemy, że

$$A_0 = \{\omega : f_0(\omega) > 0\}$$

jest supremum nieznanym rodziny $\mathcal{A}$.

Niech $B \in \mathcal{A}$. Gdyby $\mu(B\setminus A_0) > 0$, to z definicji ν mamy $\nu(B\setminus A_0) \ge \mu(B\setminus A_0) > 0$, bo $B\setminus A_0 \in \mathcal{A}$, co prowadzi do sprzeczności

$$0 < \nu(B\setminus A_0) = \int_{B\setminus A_0} f_0 \, d\mu = \int_{B\setminus A_0} 0 \, d\mu = 0 \; \lightning$$

Zatem $\mu(B\setminus A_0) = 0$ dla każdego $B \in \mathcal{A}$

Jeżeli B_0 jest innym zb. o tej samej własności

$\left(\forall_{B \in \mathcal{A}} \ \mu(B \setminus B_0) = 0 \right)$, to dla każdego

$B \subseteq A_0 \setminus B_0$, $B \in \mathcal{A}$ mamy

$$\mu(B) \overset{B = B \setminus B_0}{=} \mu(B \setminus B_0) = 0, \text{ skąd}$$

$$\int_{A_0 \setminus B_0} f_0 \, d\mu = \nu(A_0 \setminus B_0) \overset{\text{def}}{=} \sup\{\mu(B) : B \subseteq A_0 \setminus B_0, \ B \in \mathcal{A}\}$$

$$= 0$$

Ale $f_0 > 0$ na $A_0 \setminus B_0$. Zatem powyższa równość implikuje, że $\mu(A_0 \setminus B_0) = 0$.

Zatem $A_0 = \mu\text{-}\sup \mathcal{A}$. $\blacksquare$

Trzeba jeszcze wykazać jednoznaczność pochodnej Radona-Nikodýma $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jeżeli f_0 i $\tilde{f}_0$ są takie, że

$$\forall_{A \in \Sigma} \ \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu = \int_A \tilde{f}_0 \, d\mu$$

to z jednoznaczności quasi-funkcji $\{f_A\}_{A \in \mathcal{F}_\mu}$

mamy

$$\tilde{f}_0 \cdot 1\!\!1_A \overset{\mu\text{-pw}}{=} f_A \overset{\mu\text{-pw}}{=} f_0 1\!\!1_A$$

i więc założyli, że $f_0 = \mu\text{-sup}\{f_A\}_{A \in \mathcal{F}_\mu}$

wtedy $f_0 \overset{\mu\text{-pw.}}{\leq} \tilde{f}_0$. Założmy nie wprost, że

zbiór

$$\{\omega : f_0(\omega) < \tilde{f}_0(\omega)\}$$

ma niezerową μ-miarę. Z semi-skończoności istnieje wtedy zbiór

$$A \subseteq \{\omega : f_0(\omega) < \tilde{f}_0(\omega)\}$$

taki, że $0 < \mu(A) < +\infty$. Czyli w szczególności $A \in \mathcal{F}_\mu$, czyli $f_0 1\!\!1_A \overset{\mu\text{-pw.}}{=} \tilde{f}_0 1\!\!1_A$ ↯

bo $\forall_{x \in A}$ $f_0(x) \neq \tilde{f}_0(x)$ ∎